



**КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ**



**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

3D моделирование физических процессов

Методы исследования конечно-разностных схем на устойчивость

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

МЕТОД ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Этот метод наиболее прост, часто используется на практике, хотя не имеет теоретического обоснования.

Он заключается в том, что необходимо потребовать, чтобы коэффициенты КРС были положительны, а их сумма не превосходила единицу.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$f_{i,n+1} = (1 - 2d)f_{i,n} + \left(d - \frac{C}{2}\right)f_{i+1,n} + \left(d + \frac{C}{2}\right)f_{i-1,n}$$

Условия устойчивости запишутся следующим образом:

$$1 - 2d \geq 0 \Rightarrow d \leq \frac{1}{2} \qquad d - \frac{C}{2} \geq 0 \Rightarrow C \leq 2d \Rightarrow C \leq 1$$

$$d + \frac{C}{2} \geq 0 \text{ — выполняется всегда;}$$

$$1 - 2d + d - \frac{C}{2} + d + \frac{C}{2} = 1 \text{ — выполняется всегда.}$$

Тремя разными методами получены одинаковые критерии устойчивости. Такой результат получается только для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Подчеркнем еще раз, что связь между сходимостью, аппроксимацией и устойчивостью заключается в том, что **необходимыми условиями сходимости конечно-разностной схемы является ее устойчивость и аппроксимация соответствующего дифференциального уравнения.**

В 1952 г. В.С. Рябенкиным была сформулирована **теорема эквивалентности**, которая устанавливает эквивалентность устойчивости и сходимости при выполнении следующих условий:

- решение дифференциального уравнения в частных производных должно непрерывным образом зависеть от начальных условий;
- конечно-разностное уравнение должно аппроксимировать дифференциальное уравнение в частных производных;
- устойчивость должна быть определена в форме фон Неймана.

При выполнении этих требований необходимое условие устойчивости становится и достаточным для сходимости.

Для нелинейных уравнений эта теорема не доказана, но на практике ее используют применительно и к нелинейным уравнениям.